

УДК 517.95

**О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ****Ф.Х.АЛИЗАДЕ***Бакинский Государственный Университет**yashar_aze@mail.ru*

В работе исследована одна обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным граничным условием. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, дифференциальные уравнения, существование, единственность, классическое решение.

Теория краевых задач для неклассических уравнений с частными производными является важнейшим разделом современной теории дифференциальных уравнений. В последние десятилетия исследования в этой области проводились наиболее интенсивно благодаря многочисленным приложениям в газовой динамике, в механике сплошной среды, при распространении акустических волн в слабо неоднородных средах, в математической биологии, а также при математическом моделировании различных других прикладных задач. Нашей целью является изучение начально-конечной задачи для полного уравнения Буссинеска–Лява моделирующего продольные волны в упругой балке с учетом поперечной инерции.

Современные проблемы естествознания приводят к необходимости обобщения классических задач математической физики, а также к постановке качественно новых задач, к которым можно отнести нелокальные задачи для дифференциальных уравнений. Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями. Нелокальные интегральные условия описывают поведение решения во внутренних точках области в виде некоторого среднего. Такого рода интегральные условия встречаются при исследовании физических явлений в

случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений. Примером могут служить задачи, возникающие при исследовании диффузии частиц в турбулентной плазме [1], процессов распространения тепла [2], процесса влагопереноса в капиллярно-простых средах [3], а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики [4].

Смешанные задачи для гиперболических уравнений с нелокальными интегральными условиями были ранее рассмотрены в работах [5-6].

Постановка задачи и её сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения [8]

$$u_{tt}(x,t) - 2\alpha u_{txx}(x,t) + \beta u_{xxxx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \quad (1)$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

граничными условиями

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = u_{xxx}(0,t) = 0, \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4)$$

и с дополнительным условием

$$u(0,t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (5)$$

где $\alpha > 0, \beta > \alpha^2$ - заданные числа, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ - заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ - искомые функции.

Определение. Классическим решением задачи (1)-(5) назовём пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);

2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$;

3) все условия (1)-(5) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1. Пусть

$$\varphi(x) \in C[0,1], \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \psi(x) \in C[0,1], \int_0^1 \psi(x) dx = 0,$$

$$f(x,t) \in C(D_T), \int_0^1 f(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

$$h(t) \in C^2[0, T], h(t) \neq 0 \quad (0 \leq t \leq T), \varphi(0) = h(0), \psi(0) = h'(0).$$

Тогда задача нахождения решения задачи (1)-(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения решения задачи (1)-(4), из (1), (2) и

$$u_{xxx}(1,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (6)$$

$$a(t)h(t) + f(0,t) = h''(t) - 2\alpha u_{xx}(0,t) + \beta u_{xxx}(0,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)-(5). Интегрируя уравнение (1) по x от 0 до 1, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x,t) dx - 2\alpha(u_{xx}(1,t) - u_{xx}(0,t)) + \beta(u_{xxx}(1,t) - u_{xxx}(0,t)) = \\ = a(t) \int_0^1 u(x,t) dx + \int_0^1 f(x,t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \end{aligned} \quad (8)$$

Допуская, что $\int_0^1 f(x,t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$) и с учётом (3),(4), легко приходим к выполнению (6).

Далее, считая $h(t) \in C^2[0,T]$ и дифференцируя два раза (5), получаем:

$$u_{tt}(0,t) = h''(t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (9)$$

Далее, из (1) имеем:

$$u_{tt}(0,t) - 2\alpha u_{xx}(0,t) + \beta u_{xxx}(x_0,t) = a(t)u(0,t) + f(0,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (10)$$

Отсюда, с учётом (5) и (9), приходим к выполнению (7).

Теперь, предположим, что $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (6), (7). Тогда из (8), с учётом (3) и (6), находим:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x,t) dx - a(t) \int_0^1 u(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \quad (11)$$

В силу (2) и $\int_0^1 \varphi(x) dx = 0$, $\int_0^1 \psi(x) dx = 0$, очевидно, что

$$\int_0^1 u(x,0) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 u_t(x,0) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0. \quad (12)$$

Так как задача (11), (12) имеет только тривиальное решение, то $\int_0^1 u(x,t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$), т.е. выполняется условия (4).

Далее, из (7) и (10), получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2} (u(0,t) - h(t)) = a(t)(u(0,t) - h(t)) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (13)$$

В силу (2) и $\varphi(0) = h(0)$, $\psi(0) = h'(0)$, имеем:

$$u(0,t) - h(0) = \varphi(0) - h(0) = 0, \quad u_t(0,t) - h'(0) = \psi(0) - h'(0) = 0. \quad (14)$$

Из (13) и (14), заключаем, что выполняется условие (5). Лемма доказана.

Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи.

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1),(2),(6),(7) будем искать в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi), \quad (15)$$

где

$$u_k(t) = l_k \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0,1,\dots),$$

$$l_k = \begin{cases} 1, & \text{при } k=0 \\ 2, & \text{при } k=1,2,\dots \end{cases}$$

Теперь, из (7), с учётом (16), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(x_0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left(2\alpha u'_{1k}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{1k}(t) \right) \cos \lambda_k x_0 + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left(2\alpha u'_{2k}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{2k}(t) \right) \sin \lambda_k x_0 \right\}.$$

Тогда, применяя формальную схему метода Фурье, из (1) и (2) получаем:

$$u_k''(t) + 2\alpha \lambda_k^2 u_k'(t) + \beta \lambda_k^4 u_k(t) = F_k(t; u, a) \quad (0 \leq t \leq T; k = 0,1,\dots), \quad (16)$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad u_k'(0) = \psi_k \quad (k = 0,1,\dots), \quad (17)$$

где

$$F_k(t; u, a) = f_k(t) + a(t)u_k(t), \quad f_k(t) = l_k \int_0^1 f(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0,1,\dots),$$

$$\varphi_k = l_k \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_k = l_k \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0,1,\dots).$$

Решая задачу (16),(17), находим:

$$u_0(t) = \varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^t (t-\tau)F_0(\tau; u, a)d\tau \quad (0 \leq t \leq T), \quad (18)$$

$$u_k(t) = e^{\alpha_k t} \left[\left(\cos \beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) \varphi_k + \frac{\psi_k}{\beta_k} \sin \beta_k t \right] + \\ + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_k(\tau; u, a) \sin \beta_k (t-\tau) e^{\alpha_k(t-\tau)} d\tau \quad (k = 1,2,\dots; 0 \leq t \leq T), \quad (19)$$

где

$$\alpha_k = -\alpha\lambda_k^2, \beta_k = \lambda_k^2\sqrt{\beta - \alpha^2}.$$

После подстановки выражения $u_k(t)$ ($k=0,1,\dots$) в (15), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1), (2), (6) и (7) получаем:

$$u(x,t) = \varphi_0 + t\psi_0 + \int_0^t (t-\tau)F_0(\tau;u,a)d\tau + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ e^{\alpha_k t} \left[\left(\cos \beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t \right) \varphi_k + \frac{\psi_k}{\beta_k} \sin \beta_k t \right] + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_k(\tau;u,a) \sin \beta_k (t-\tau) e^{\alpha_k(t-\tau)} d\tau \right\} \cos \lambda_k x. \quad (20)$$

Теперь, из (7), с учётом (15), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (2\alpha u'_{1k}(t) + \beta \lambda_k^2 u_{1k}(t)) \right\}. \quad (21)$$

Дифференцируя (19), получим:

$$u'_k(t) = e^{\alpha_k t} \left[-\frac{1}{\beta_k} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \varphi_k \sin \beta_k t + \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t + \cos \beta_k t \right) \psi_k \right] + \\ + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_k(\tau;u,a) (\alpha_k \sin \beta_k (t-\tau) + \beta_k \cos \beta_k (t-\tau)) e^{\alpha_k(t-\tau)} d\tau \quad (k=1,2,\dots; 0 \leq t \leq T). \quad (22)$$

Далее, из (19) и (22), получаем:

$$2\alpha u'_k(t) + \beta \lambda_k^2 u_k(t) = e^{\alpha_k t} \left\{ \left[\left(\beta \lambda_k^2 \cos \beta_k t - \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 \alpha_k + 2\alpha(\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \sin \beta_k t \right) \varphi_k + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 + 2\alpha \alpha_k) \sin \beta_k t + 2\alpha \cos \beta_k t \right) \psi_{ik} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_k(\tau;u,a) \left((2\alpha \alpha_k + \beta \lambda_k^2) \sin \beta_k (t-\tau) + 2\alpha \beta_k \cos \beta_k (t-\tau) \right) e^{\alpha_k(t-\tau)} d\tau \right\}. \quad (23)$$

Тогда из (21), с учётом (23), находим:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0,t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left\{ e^{\alpha_k t} \left[\left(\beta \lambda_k^2 \cos \beta_k t - \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 \alpha_k + 2\alpha(\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \sin \beta_k t \right) \varphi_k + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 + 2\alpha \alpha_k) \sin \beta_k t + 2\alpha \cos \beta_k t \right) \psi_k \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_k(\tau;u,a) \left((2\alpha \alpha_k + \beta \lambda_k^2) \sin \beta_k (t-\tau) + 2\alpha \beta_k \cos \beta_k (t-\tau) \right) e^{\alpha_k(t-\tau)} d\tau \right\} \right\}. \quad (24)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3),(6),(7) сведено к решению системы (20), (24) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Справедлива следующая

Лемма 2. Если $\{u(x,t), a(t)\}$ - любое решение задачи (1)-(3),(6) ,(7), то функции

$$u_k(t) = l_k \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0,1,\dots)$$

удовлетворяют системе, состоящей из уравнений (18), (19).

Замечание. Из леммы 2 следует, что для доказательства единственности решения задачи (1), (2), (5), (6), достаточно доказать единственность решения системы (20), (24).

С целью исследования задачи (1)-(3),(6) ,(7), рассмотрим следующие пространства. Обозначим через $B_{2,T}^\alpha$ [7] совокупность всех функций вида

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi),$$

рассматриваемых в D_T , где каждая из функций $u_k(t)$ ($k = 0,1,\dots$) непрерывна на $[0,T]$ и

$$J(u) \equiv \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^\alpha \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

причём $\alpha \geq 0$. Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^\alpha} = J(u).$$

Через E_T^α обозначим пространство $B_{2,T}^\alpha \times C[0,T]$ вектор-функций $z(x,t) = \{u(x,t), a(t)\}$ с нормой

$$\|z(x,t)\|_{E_T^\alpha} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^\alpha} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^\alpha$ и E_T^α являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^5 оператор

$$\Phi(u, a) = \{\Phi_1(u, a), \Phi_2(u, a)\},$$

где

$$\Phi_1(u, a) = \tilde{u}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \cos \lambda_k x,$$

$$\Phi_2(u, a) = \tilde{a}(t),$$

а $\tilde{u}_0(t)$, $\tilde{u}_k(t)$ и $\tilde{a}(t)$ равны, соответственно, правым частям (18), (19) и (24).

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
\left| \cos \beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k t \right| &\leq 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} \equiv \varepsilon_1, \\
\left| \frac{1}{\beta_k} \sin \beta_k t \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} \frac{1}{\lambda_k^2} \equiv \varepsilon_2 \frac{1}{\lambda_k^2}, \\
\left| \beta \lambda_k^2 \cos \beta_k t - \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 \alpha_k + 2\alpha(\alpha_k^2 + \beta_k^2)) \sin \beta_k t \right| &\leq \left(\frac{3\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 1 \right) \beta \lambda_k^2 \equiv \varepsilon_3 \lambda_k^2, \\
\left| \frac{1}{\beta_k} (\beta \lambda_k^2 + 2\alpha \alpha_k) \sin \beta_k t + 2\alpha \cos \beta_k t \right| &\leq \frac{\beta + 2\alpha^2}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 2\alpha \equiv \varepsilon_4, \\
\frac{1}{\beta_k} \left| (2\alpha \alpha_k + \beta \lambda_k^2) \sin \beta_k (t - \tau) + 2\alpha \beta_k \cos \beta_k (t - \tau) \right| &\leq \varepsilon_4.
\end{aligned}$$

Тогда, с помощью нетрудных преобразований находим:

$$\|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0,T]} \leq |\varphi_{10}| + T|\psi_{10}| + T\sqrt{T} \left(\int_0^T |f_{10}(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq 2\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
+ 2\varepsilon_1 \sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} &+ 2\varepsilon_1 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|a(t)\|_{C[0,T]} &\leq \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(0,t)\|_{C[0,T]} + \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
&\left. + \frac{\sqrt{6T}}{12} \varepsilon_4 \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon_4 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (27)
\end{aligned}$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3),(6) ,(7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^4[0,1]$, $\varphi^{(5)}(x) \in L_2(0,1)$ и $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(1) = 0$, $\varphi'''(0) = 0$, $\varphi'''(1) = 0$.
2. $\psi(x) \in C^2[0,1]$, $\psi^{(3)}(x) \in L_2(0,1)$ и $\psi'(0) = 0$, $\psi'(1) = 0$.
3. $f(x,t)$, $f_x(x,t)$, $f_{xx}(x,t) \in C(D_T)$, $f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T)$ и $f_x(0,t) = 0$, $f_x(1,t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$).
4. $h(t) \in C^2[0,T]$, $h(t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq T$).

Тогда из (25)- (27) получаем:

$$\|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0,T]} \leq \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\sqrt{T}\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)} + T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq 2\varepsilon_1\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\varepsilon_2\|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\varepsilon_2\sqrt{T}\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \\ &+ 2\varepsilon_2T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} &\leq \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\left\{\|h''(t) - f(0,t)\|_{C[0,T]} + \frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_3\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4\|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \right. \\ &\left. + \frac{\sqrt{6T}}{12}\varepsilon_4\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4T\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}\right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Далее, из (28) и (29) находим:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^5} \leq A_1(T) + A_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}, \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(T) &= \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + T\sqrt{T}\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)} + 2\varepsilon_1\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ 2\varepsilon_2\|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\varepsilon_2\sqrt{T}\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \\ A_2(T) &= (T + 2\varepsilon_2)T. \end{aligned}$$

Теперь из (30) имеем:

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq B_1(T) + B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(T) &= \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\left\{\|h''(t) - f(0,t)\|_{C[0,T]} + \frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_3\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \right. \\ &\left. + \frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4\|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{\sqrt{6T}}{12}\varepsilon_4\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\right\}, \\ B_2(T) &= \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\frac{\sqrt{6}}{12}\varepsilon_4T. \end{aligned}$$

Из неравенств (31) и (32) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}, \quad (33)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + B_1(T), \quad B(T) = A_2(T) + B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1-4 и

$$(A(T) + 2)^2 B(T) < 1. \quad (34)$$

Тогда задача (1)-(3), (6), (7) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^5} \leq R = A(T) + 2)$ пространства E_T^5 единственное решение.

Доказательство. В пространстве E_T^5 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (35)$$

где $z = \{u, a\}$, компоненты $\Phi_i(u, a)$ ($i=1,2$) оператора $\Phi(u, a)$ определены правыми частями уравнений (20) и (24).

Рассмотрим оператор $\Phi(u, a)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^5 . Аналогично (33) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^5} \leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}, \quad (36)$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^5} \leq B(T)R\left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^5}\right). \quad (37)$$

Тогда, из оценок (36),(37), с учётом (34), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является в шаре $K = K_R$ единственным решением уравнения (35), т.е. $\{u, a\}$ является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (20), (24).

Функция $u(x, t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^5$, имеет непрерывные производные $u(x, t)$, $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$, $u_{xxx}(x, t)$, $u_{xxxx}(x, t)$ в D_T .

Теперь из (26) находим:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}'_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{2\beta}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 |\varphi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 1\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ 2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 1\right) \left[\sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}'_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{2\beta}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} \|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + 2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 1\right) \|\psi^{(3)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ 2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\beta - \alpha^2}} + 1\right) \left[\sqrt{T} \|f_{xxx}(x, t)\| + T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $u_t(x, t)$, $u_{tx}(x, t)$, $u_{txx}(x, t)$ непрерывны в D_T .

Далее, из (18) и (20), имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \leq 4\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k'(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} + 2\beta \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} + 2 \|f_x(x,t) + a(t)u_x(x,t)\|_{C[0,T]} \|L_2(0,1)\|.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в D_T .

Из (8) нетрудно видеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{\alpha} \|f_x(x,t) + a(t)u_x(x,t)\|_{C[0,T]} \|L_2(0,1)\|.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$, $u_{ttxx}(x,t)$ непрерывны в D_T .

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (3), (6), (7) удовлетворяются в обычном смысле.

Следовательно, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи ((1)-(3), (6), (7)), причём, в силу леммы 2, оно единственное в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

С помощью леммы 1 доказывается следующая

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1 и

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \int_0^1 f(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

$$\varphi(0) = h(0), \quad \psi(0) = h'(0).$$

Тогда задача (1)-(5) имеет в шаре $K = K_R (\|z\|_{E_T^5} \leq R = A(T) + 2)$ из E_T^5 единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 1980, т.16, №11, с.1925-1935.
2. Cannon J.R. The solution of the Heat Equation Subject to the Specification of Energy// Quart. Appl. Math., 1963, v.5, 21, p. 155-160.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием// Дифференц. уравнения, 1977, т.13, №2, с.294-304.
4. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений задач и его приближения к динамике померенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения, 1982, т.18, №1, с.72-81.
5. Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. // Мат. моделирование, 2000, т.12, №1, с. 94-103.
6. Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения, 2004, т.40, №7, с. 887-892.
7. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью, Баку: Чашыюглы, 2010, 168 с.
8. Yan Z.Y., Xie F.D. and Zhang H.Q. Symmetry Reductions, Integrability and Solitary Wave Solutions to High-Order Modified Boussinesq Equations with Damping Term // Communications in Theoretical Physics, 2001, v.36, No1, pp. 1-6.

DÖRD TƏRTİBLİ BUSSİNİSKİ TƏNLIYI ÜÇÜN İNTEQRAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ BİR TƏRS MƏSƏLƏNİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

F.X.ƏLİZADƏ

XÜLASƏ

İşdə dörd tərtibli xüsusi törəmli diferensial tənlik üçün inteqral sərhəd şərti daxilində bir tərs sərhəd məsələsi tədqiq olunur. Əvvəlcə qoyulmuş məsələ ekvivalent tənliklər sisteminə gətirilir və onun üçün həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat olunur. Sonra isə bu faktdan istifadə edərək verilmiş məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi isbat edilir.

Açar sözlər: tərs məsələ, diferensial tənliklər, varlığı, yeganəlik, klassik həll.

ON SOLVABILITY OF AN INVERSE VALUE PROBLEM FOR A SINGLE FOURTH-ORDER BOUSSINESQ EQUATION WITH AN INTEGRAL CONDITION

F.Kh.ALIZADEH

SUMMARY

In the article an inverse boundary problem for a partial differential equation of fourth order with integral condition is investigated. First, an original problem is reduced to the equivalent problem, then the theorem for existence and uniqueness of the solution for the latter is proved. Further, using this fact, the existence and uniqueness of the classical solution of the considered problem are proved.

Key words: inverse problem, differential equations, existence, uniqueness, classical solution.

Поступила в редакцию: 17.11.2015 г.

Подписано к печати: 12.02.2016 г.